数理解析研究所講究録
第 689 巻 1989 年 165-171

ジーゲル保型形式に付随するディリクレ級数

九大 理 山崎 正 (Tadashi Yamazaki)

1 Rankin-Selberg の方法

まず古典的な保型形式に対する Rankin-Selberg の方法を復習する．$SL(2,\mathbf{Z})$ に関する重さ ℓ の cusp 形式 $f(z)$,$h(z)$ を考え，その Fourier 展開を

$$f(z)=\sum_{m=1}^{\infty} a_m \mathbf{e}(mz)$$
$$h(z)=\sum_{m=1}^{\infty} b_m \mathbf{e}(mz)$$

とする．ここで $\mathbf{e}(x)=e^{2\pi ix}$．このとき Dirichlet 級数

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \bar{b}_m m^{-s}$$

の解析的性質は E_s をある正則ではない重さ 0 の Eisenstein 級数として Petersson 内積 (fE_s,h) を調べればよいというのが Rankin の方法であった．ここではこの方法が Siegel cusp 形式に対してもそのまま実行できることを示す．即ち Siegel cusp 形式 $F(\tau)$,$H(\tau)$ を取りその Fourier(-Jacobi) 展開を

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \sum_{T>0} a(T)\mathbf{e}(Tr(T\tau)) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau_1,\tau_3)\mathbf{e}(m\tau_4) \\ H(\tau) &= \sum_{T>0} b(T)\mathbf{e}(Tr(T\tau)) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} h_m(\tau_1,\tau_3)\mathbf{e}(m\tau_4) \end{aligned}$$

とする．ここで $\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_3 & \tau_4 \end{pmatrix}$ は n 次 Siegel 上半空間 H_n の点で $\tau_1 \in H_{n-1}, \tau_4 \in H_1$ である．f_m と h_m の Jacobi 形式としての Petersson の内積を $< f_m, h_m >$ と書くとき Dirichlet 級数

$$(1) \qquad \Sigma_{T/\sim} \frac{a(T)\bar{b}(T)}{\varepsilon(T)(detT)^s}$$
$$(n) \quad \Sigma_{m=1}^{\infty} < f_m, h_m > m^{-s}$$

などの解析的性質が重さ０の Eisenstein 級数を用いてわかる．級数（１）は $n = 2$ のときに Maass[5], 一般の n については黒川氏（unpublished），級数（n）は最近 $n = 2$ に対して Kohnen-Skoruppa[3] により特にその数論的性質が調べられている．

2 Eisenstein 級数

Eisenstein 級数の一般論は Langlands [4],Harish-Chandra [1] により展開されているが，ここではその流れをくむ Kalinin [2] に従う．記号はほぼ全面的に [2] のもを定義無しに用いる．特に $G = Sp(n, \mathbf{R})$ は n 次 Symplectic 群，$\Gamma = Sp(n, \mathbf{Z})$ は Siegel Modular 群である．しかし都合により simple roots の系 $\Sigma^\circ = \{\alpha_1, \ldots .\alpha_n\}$ としては

$$\alpha_1 = 2\epsilon_1, \alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_1, \ldots, \alpha_n = \epsilon_n - \epsilon_{n-1}$$

を取る．このとき fundamental weight は

$$\bar{\omega}_i = \ \epsilon_i + \epsilon_{i+1} + \ldots + \epsilon_n \ \ 1 \leq i \leq n$$

となることに注意する．この simple roots の系 Σ° に対応する Borel pair (P,A) は

$$P = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G; c = 0, a = lowertriangular\}$$

で与えられる．P の Langlands 分解を $P = MAU, \underline{a}$ を A の Lie 環，$log : A \longrightarrow \underline{a}$ を指数写像の逆写像とする．$\underline{a}$ の複素化の双対空間 $\underline{a}^*_{\mathbf{C}}$ の元 λ と $a \in A$ に対し　$\omega_\lambda(a) = e^{\lambda(loga)}$ と書く．このとき Eisenstein 級数は G の元 g に対し

$$E(P|A:\lambda:g) = \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma \cap P} \omega_{-(\lambda+\rho)}(a(g\gamma))$$

で定義される．ここで ρ は正 roots の和の半分，$a(g)$ は g を $g = kma(g)u, k \in K, m \in M, a(g) \in A, u \in U$ と分解したときの A 成分である．また

$$(\underline{a}^*_{\mathbf{C}})^- = \{\lambda \in \underline{a}^*_{\mathbf{C}}; < Re(\lambda) - \rho, \alpha >> 0 for \ \forall\ \alpha \in \Sigma^\circ\}$$

とするとき上式の右辺は任意の $g \in G$ と $\lambda \in (\underline{a}^*_{\mathbf{C}})^-$ に対し絶対収束する．fundamental weights による $\underline{a}^*_{\mathbf{C}}$ の座標を $\lambda : \mathbf{C}^n \longrightarrow \underline{a}^*_{\mathbf{C}}$ とする．$z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ と $g \in G$ に対し

$$E(z, g) = E(P|A : \lambda(z) : g)$$

と置けば，これは $Re(z_i) > 1$ $(1 \le i \le n)$ において正則である．整数 $r, (1 \le r \le n)$ に対し $z_r = 1$ 以外のところで留数を取り

$$\tilde{E}_r(z_r, g) = Res_{z_n=1} \ldots \widehat{Res_{z_r=1}} \ldots Res_{z_1=1} E(z_1, \ldots, z_n : g)$$

と置く．

命題 1 $\tilde{E}_r$ は $Re(z_r) > 1$ で正則で全平面に有理型に解析接続され関数等式

$$\tilde{E}_r(s,g) = c_r(s)\tilde{E}_r(2-n-r-s,g)$$

を満たす．ここで

$$c_r(s) = \prod_{i=1}^{2r-1} \frac{\xi(s+i-1)}{\xi(s+n-r+i)} \prod_{j=r}^{n-1} \frac{\xi(2s+2j-1)}{\xi(2s+n+j-1)},$$

$$\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s).$$

注意 1 r が特別な場合 c_r は簡約される．例えば

$$c_n(s) = \frac{\xi(s)}{\xi(s+2n-1)}$$

$$c_1(s) = \frac{\xi(s)}{\xi(s+n)} \prod_{j=1}^{[n/2]} \frac{\xi(2s+2j-1)}{\xi(2s+2n-2j)}$$

Σ° の部分集合 $\Sigma^\circ_r = \Sigma^\circ - \{\alpha_r\}$ に対応する極大 parabolic 部分群を P_r とする．$s \in \mathbf{C}, \tau \in H_n$ に対し

$$E_r(s,\tau) = \sum_{\gamma\in\Gamma\cap P_r\backslash\Gamma} (\frac{detIm(\gamma<\tau>)}{det(Im(\gamma<\tau>))_{r-1}})^s$$

と置く．ここで n 次正方行列 X に対し $(X)_{r-1}$ は左上の $(r-1)\times(r-1)$ 部分から成る主小行列を表す．上式の右辺は $Re(s)$ が十分大きいところで絶対収束する．

命題 2 $g \in G$ に対し $\tau = g^{-1}<i1_n> \in H_n$ とし ${}^*E_r(s,g) = E_r(s,\tau)$ と置く．このとき

$${}^*E_r(s,g) = \prod_{j=1}^{r-1} \xi(2j) \prod_{j=2}^{n-r+1} \xi(j)\tilde{E}_r(2s-n-r+1,g)$$

が成立する．

以上より次を得る．

命題 3 $E_r(s,g)$ は $Re(s) > \frac{n+r}{2}$ で正則で全平面に有理型に解析接続され関数等式

$$E_r(\frac{n+r}{2}-s,g)=c_r(1-2s)E_r(s,g)$$

を満たす．

$r=n$ の場合には Weyl 群の計算により留数がわかり次が成立する．

命題 4 関数

$$\xi(2s)E_n(s,\tau)$$

は変換 $s\mapsto n-s$ で不変であり， $s=n$ と $s=0$ での 1 位の極を除いて全平面で正則，そして $s=n$ での留数は 1 である．

注意 2 *Kalinin [2]* はこれらのことを $r=1$ の場合にやっている．

3 Zeta 関数

一般の r に対しても同様であるからここでは $r=n$ の場合のみを書く． F,H を重さ ℓ の Siegel cusp 形式としその Fourier-Jacobi 展開を

$$\begin{aligned}
F(\tau) &= \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau_1,\tau_3)\mathbf{e}(m\tau_4)\\
H(\tau) &= \sum_{m=1}^{\infty} h_m(\tau_1,\tau_3)\mathbf{e}(m\tau_4)
\end{aligned}$$

とする．ここで $\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_3 & \tau_4 \end{pmatrix}$ は H_n の点で $\tau_1 \in H_{n-1}, \tau_4 \in H_1$ ，そして f_m, h_m は index m の Jacobi 形式でこれらの Petersson 内積を $< f_m, h_m >$ と書く [6]．

補題 1 *Dirichlet* 級数

$$D_{F,H}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} < f_m, h_m > m^{-s}$$

は $Re(s) > \ell + 1$ に対し絶対収束する．

前節の Eisenstein 級数 $E_n(s, \tau)$ を用いて $F(\tau)E_n(s, \tau)$ と $H(\tau)$ の内積を計算することにより次を得る．

命題 5 F, H を重さ ℓ の *Siegel cusp* 形式とする．このとき

$$< F(\tau)E_n(s, \tau), H(\tau) >= (4\pi)^{-(s+\ell-n)}\Gamma(s+\ell-n)D_{F,H}(s+\ell-n)$$

が $Re(s) > n + 1$ に対して成立する．

これを前節最後の命題と組み合わせれば Dirichlet 級数 $D_{F,H}(s)$ の解析接続や関数等式が得られる．

注意 3 *Kohnen-Skoruppa* は *[3]* において *Dirichlet* 級数 $D_{F,H}(s)$ を $n = r = 2$ に対し詳しく調べている．特に F が *Maass* 空間に入る *Hecke* 作用素の同時固有関数の時， $D_{F,F}(s)$ は初等因子を除いて *Andrianov* の *spinor* L－関数と一致することを示している．

参考文献

[1] Harish-Chandra. *Automorphic forms on semisimple Lie groups*. Volume 62 of *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, 1968.

[2] V.L. Kalinin. Eisenstein series on the symplectic group. *Math. USSR Sbornic*, 32:449–476, 1977.

[3] W Kohnen and N.-P. Skoruppa. *A certain Dirichlet series attached to Siegel modular forms of degree two*. Technical Report MPI / 88-22, Max-Plank-Institut, 1988.

[4] R.P. Langlans. *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*. Volume 544 of *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, 1976.

[5] Hans Maass. Dirichletsche reihen und modulformen zweiten grades. *Acta Arithmetica*, 24:223–238, 1973.

[6] Atsushi Murase. L-functions attached to jacobi forms of degree n, part i. 1988. preprint.